1er Coloquio del Departamento de Matemáticas

Una Introducción Elemental al Análisis Estadístico Secuencial

Andrey Novikov

Casa abierta al tiempo

Una Introducción Elemental al Análisis Estadístico Secuencial

Andrey Novikov

Casa abierta al tiempo
Universidad Autónoma Metropolitana

1. Introducción

El análisis secuencial forma parte de la teoría estadística desde hace aproximadamente 60 años. El resultado más famoso del análisis secuencial es la optimalidad de la prueba estadística llamada la prueba secuencial de razón de probabilidades (*sequential probability ratio test, SPRT*) cuya primera demostración apareció en 1948 (vea A. Wald y J. Wolfowitz [10]).

Las cuestiones del análisis secuencial vienen hoy en día hasta en libros de texto, por ejemplo, en el clásico libro de Lehmann [8] o en el de Zacks [11], o en el de Borovkov [1], entre otros. Sin embargo, aúnque éstos (igual que [10], por cierto) proporcionan ciertos argumentos informales del porqué la SPRT resulta óptima, todos ellos carecen de una rigurosidad merecida en una obra matemática.

Algunos otros lo ponen más formal, por ejemplo, [3] o [4], pero omiten muchos detalles esenciales y por eso no son de una lectura fácil para estudiantes, aún de los más preparados y aplicados.

Por fin, hay libros muy especializados que tienen todos los elementos necesarios para el desarrollo (ver [2] o [9]) pero éstos traen como base toda una teoría (llamada la *teoría de paro óptimo*) la que es bastante amplia, general y por lo tanto compleja. De hecho, es precisamente esta teoría que ocupa practicamente toda la atención de los autores: en todo el libro [2] no quedó lugar para la demostración de la optimalidad de la SPRT derivada de la teoría que se desrrolló. Es un poco mayor el avance al respecto en [9], pero tampoco viene la demostración en un sólo lugar, remitiendo al lector nuevamente al libro de Lehmann [8].

Y, para completar el cuadro, hay que decir que también existen libros sobre el análisis secuencial, en los que la demostración se da, pero incorrecta (ver [5]), y en los que ni siquiera se da (por ejemplo, [6]).

El objetivo de estas notas es proporcionar al estudiante que está interesado en el fondo matemático del análisis secuencial una demostración clara, concisa y autosufuciente de la optimalidad de la prueba SPRT. Para ello, nos restringimos al caso particular de observaciones con un número finito de valores (como son, por ejemplo, variables Bernoulli, uniformes discretas, hipergeométricas, etc. o, en general, cualquier tipo de datos categóricos). Esta suposición permite evitar algunas complicaciones técnicas relacionadas con la convergencia de series infinitas paramétricas.

El lector bien familiarizado con las cuestiones del cálculo avanzado fácilmente se dará cuenta que la misma demostración pasa en el caso general de variables aleatorias discretas.

Uno quien domina la teoría de medida e integración podrá realizar la misma para el caso de variables aleatorias continuas, o, aún más general, para elementos aleatorios de un espacio medible, siguiendo los mismos pasos.

Mientras tanto, estamos viendo el caso más elemental, y para entender bien todo no va a ser necesario más que las nociones elementales de análisis (básicamente la convergencia de sucesiones numéricas y la de las series numéricas) y los conceptos básicos de probabilidad (distribución y esperanza) y estadística (pruebas de hipótesis).

Así que de esta forma el curso es accesible para los estudiantes de licenciatura quienes han tomado alguna vez un curso de estadística.

Le va a ser un poco más difícil leer estas notas a quien no está familiarizado con la ideología estadística, pero tampoco es imposible, ya que el curso es bastante autosuficiente. En particlular, uno puede utilizar el material contenido aquí como una la introducción a las pruebas estadísticas y a la teoría de decisión.

2. Modelo matemtico y conceptos bsicos

Nuestro objetivo en esta sección es dar una descripción formal a un experimento estadístico secuencial, las hipótesis, pruebas de hipótesis y sus características numéricas.

2.1. **Experimento estadístico secuencial.** El obletivo de esta parte es formalizar la idea de un experimento estadístico secuencial.

Cualquier experimento estadístico recopila datos. El modelo más frecuente de un experimento estadístico es una *muestra de una distribución* de probabilidades, lo que significa que se observan, de manera independiente, cierto numero n de los datos, los que vienen de una misma distribución. Al resultado de esta observación se le llama *muestra aleatoria* de esta distribución, más específicamente, una de tamaño n.

La idea del análisis secuencial es, en vez de tomar un número determinado de observaciones en una sóla toma, ir formando la muestra *secuencialmente*, en función de las observaciones mismas, terminando en un momento que sea adecuado o conveniente.

Demos el formalismo necesario al concepto del experimento secuencial, con restricción a las distribuciones discretas con un número finito de valores.

Sea X una variable aleatoria que toma solamente un número finito de valores. Formalmente hablando, se trata de un conjunto finito de números x y sus probabilidades respectivas $f(x) = P(X = x)$. Por ser una distribución de probabilidades es necesario que sea

$$\sum f(x) = 1, \tag{1}$$

en donde la sumatoria es sobre todos los valores de x, y por lo tanto la suma es finita. Aquí y en adelante estamos omitiendo los límites de sumación si se trata de la suma sobre *todos* los valores posibles de la(s) variable(s) que se encuentran dentro de la sumatoria. Por ejemplo, en (1) la única variable es x y por lo tanto la sumatoria es sobre todos sus valores.

Los datos experimentales $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ que van a ser observados consecutivamente son unas copias *independientes* de X. Es decir,

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i). \tag{2}$$

para cualquier $n = 1, 2, 3 \dots$.

Para indicar en qué momento el experimento termina, necesitamos aplicar algunas *reglas* a las observaciones que se están obteniendo de manera sucesiva. En cada etapa del experimento, es decir, teniendo un número dado de observaciones recopiladas $X_1, X_2, \dots, X_n$, una regla nos tiene que decir, si éste es el momento de terminar o aún no, y se necesitan más observaciones.

Sea $\phi_n = \phi_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$ una función que toma sólamente valores 0 o1 (*función indicadora*). Cualquier función de este tipo nos puede servir como la regla de paro en esta etapa si la interpretamos de la siguiente manera:

- parar si $\phi_n = 1$,
- seguir observando si $\phi_n = 0$.

Vamos a llamarle a cualquier sucesión ϕ de funciones de este tipo

$$\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots)$$

la *regla de paro*.

Aplicando la regla de paro ϕ el algoritmo del experimento secuencial es el siguiente:

(1) Tomar la primera observación X_1 y poner n (número de etapa)= 1.
(2) Si $\phi_n(X_1, X_2, \dots, X_n) = 1$ entonces terminar el experimento,
(3) en otro caso observar X_{n+1}, aumentar n en 1 y regresar al paso 2.

En otras palabras, el experimento termina en el primer momento n cuando $\phi_n(X_1, X_2, \dots, X_n) = 1$. El número final de datos observados será

$$\nu = \begin{cases} \min\{n \geq 1 : \phi_n(X_1, X_2, \dots, X_n) = 1\} & \text{si este número es finito} \\ \infty & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{3}$$

Obviamente, pueden existir las reglas de paro para las cuales es posible que ν sea infinito (por ejemplo, $\nu \equiv \infty$ si $\phi_n \equiv 0$ para cualquier $n \geq 1$). Por razones prácticas uno tiene que evitar el uso de las reglas que lo permitan. Más adelante le damos a este requerimiento un sentido más formal.

Al número (aleatorio) ν definido en (3) se le llama *tiempo de paro*. La distribución de ν está dada por

$$P(\nu = n) = P(\phi_1 = 0, \phi_2 = 0, \dots, \phi_{n-1} = 0, \phi_n = 1). \tag{4}$$

Calculemos esta probabilidad en términos de la regla de paro y de la distribución de X.

Sea

$$\chi_n = \chi_n(X_1, X_2, \dots, X_n) = (1 - \phi_1)(1 - \phi_2)\dots(1 - \phi_{n-1})\phi_n \tag{5}$$

para $n = 1, 2, \dots$. Es fácil ver que χ_n es una función indicadora, y que $\chi_n = 1$ siempre y cuando $\nu = n$. Así que

$$P(\nu = n) = E\chi_n(X_1, X_2, \dots, X_n) \tag{6}$$

$$= \sum \chi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_{i=1}^{n} f(x_i), \tag{7}$$

debido a (2).

Las sumas como en (7) van a frecuentar en este curso. Ya quedamos que $\phi_n = \phi_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$ y $\chi_n = \chi_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Pero en ocasiones como ésta nos conviene estar entendiendo que la misma letra, digamos χ_n, puede significar también $\chi_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Esto no causa problemas si tomamos en cuenta el contexto: si una función F_n se encuentra bajo el signo de la esperanza o probabilidad (como es el caso en (6)), entonces es $F_n = F_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$; si se encuentra bajo la sumatoria (como en (7)) entonces es $F_n = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Adoptando esta notación, las fórmulas (6)-(7) se convierten en

$$P(\nu = n) = E\chi_n = \sum \chi_n \prod_{i=1}^{n} f(x_i). \tag{8}$$

2.2. **Marco estadístico. Pruebas de hipótesis.** El contexto estadístico existe siempre que haya incertidumbre sobre la distribución con la que vienen los datos.

Por ejemplo, si en el modelo estadístico clásico (2) la probabilidad $f(x)$ depende de un parámetro θ

$$f(x) = f_\theta(x),$$

entonces cualquier pregunta relacionada con el valor verdadero del parámetro θ, cuando se dispone sólamente de los datos de la muestra $X_1, X_2, \dots, X_n$, es una pregunta estadística.

Por ejemplo, para una muestra de una distribución Bernoulli

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1 \\ 1 - p & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

y el parámetro θ es la probabilidad de «éxito» $p \in [0, 1]$.

Uno de los problemas más fundamentales en estadística es el problema de pruebas de hipótesis. En este curso, estamos viendo el caso más básico de las pruebas: el caso de *dos hipótesis simples*. A una hipótesis se le llama *simple* si la distribución hipotetizada es *única*.

Así que el problema que se va a ver en este curso es: con base en los datos observados, decidir cuál de las dos hipótesis, $H_0 : \theta = \theta_0$ ó $H_1 : \theta = \theta_1$, es la verdadera.

Por ejemplo, en el ejemplo de la Bernoulli la pregunta podría ser: ?‘es cierto que los «éxitos» y «fracasos» en la sucesión observada vienen con la misma frecuencia? Es decir, nos interesa la hipótesis simple $H_0 : p = 0.5$. Si existe, como alternativa a ésta, otra suposición (H_1) sobre el valor de p, digamos, que $p = 0.6$, tenemos que pensar en cómo, utilizando los datos muestrales $X_1, X_2, \ldots, X_n$, decidir a favor de una u otra de las dos hipótesis.

Obviamente, la pregunta puede ser la misma en el contexto de un experimento secuencial, en términos de la sección anterior.

Y lo primero que necesitamos es formalizar el concepto de un procedimiento de una *prueba de hipótesis* en este marco secuencial.

Como vimos en la sección anterior, el experimento puede terminar en cualquier número de pasos $n = 1, 2, 3, \ldots$, así que tenemos que pensar en una manera de decidir a favor de H_0 o H_1 para cualquiera que sea el número terminal n de observaciones. La decisión que se pide es aceptar H_0 o rechazarla a favor de H_1, así que como una *regla de decisión* nos sirve, igual que antes, una función indicadora, es decir, una que toma sólamente valores 0 y 1.

Tomando en cuenta todo lo anterior, definamos una regla de decisión δ como una sucesión de funciones indicadoras $\delta_n = \delta_n(X_1, X_2, \ldots X_n)$, $n = 1, 2, , \ldots,$

$$\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots), \tag{9}$$

con la siguiente interpretación: al terminar el experimento secuencial en la etapa $\nu = n$

- *se acepta* la hipótesis H_0 si $\delta_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0$ y
- *se rechaza* H_0 a favor de H_1 si $\delta_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 1$

Una *prueba* estadística *secuencial* es una pareja (ϕ, δ) de una regla de paro ϕ y una regla de decisión δ.

Las pruebas clásicas, basadas en una muestra aleatoria de tamaño fijo n, es un caso particular de esta definición, más específicamente, él que corresponde a $\phi_1 \equiv \phi_2 \equiv \cdots \equiv \phi_{n-1} \equiv 0$ y $\phi_n \equiv 1$, y por lo tanto pueden ser identificadas con tan sólo una regla de decisión δ_n misma que, al terminar el experimento con datos $X_1, X_2, \ldots, X_n$, significa la aceptación de la hipótesis H_i con $i = \delta_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Vemos que la clase de las pruebas secuenciales es mucho más variada ya que cada prueba, aparte de la regla de decisión, incluye una regla de paro que determina el número final de observaciones en el experimento. Aún las pruebas *truncadas*, o sea las que emplean cuando mucho un número determinado n de observaciones (esto significa sólo que $\phi_n \equiv 1$), son mucho más variadas que las pruebas con una muestra fija, ya que tienen la libertad de parar en una etapa anterior a la n.

2.3. **Características de las pruebas.** Una prueba proporciona un algoritmo de ir observando los datos y finalmente concluir, una vez terminado el experimento.

Los datos vienen de manera aleatoria por lo que resulta posible que el algoritmo se equivoque.

Siendo verdadera la H_0, la decisión terminal puede ser «rechazarla». Y al revés, cuando H_1 es la que es válida, la decisión tomada puede ser «aceptar H_0». En el primer caso se dice que se comete el error «tipo I», y en el segundo el error «tipo II».

Si nos preocupa la calidad de la inferencia estadística tenemos que procurar que los errores no sean frecuentes. Como medida de la frecuencia se usa la probabilidad, así que trabajando con las pruebas tenemos que tomar en cuenta las probabilidades de error, lo que da lugar a la definición de la *probabilidad de error tipo I*

$$\alpha(\phi, \delta) = P_{\theta_0}(\text{rechazar } H_0) \tag{10}$$

y de la *probabilidad de error tipo II*

$$\beta(\phi, \delta) = P_{\theta_1}(\text{aceptar } H_0). \tag{11}$$

Otra característica importante de una prueba es el número final de datos observados, ν, ya que en la práctica nos interesa terminar lo más pronto posible, empleando menos observaciones, tiempo, recursos, etc.

Como ν es una variable aleatoria, es natural tomar en cuenta su valor promedio. Pero el promedio puede ser calculado tanto bajo la hipótesis H_0, como bajo la H_1, así que tenemos dos características:

$$N(\theta_0; \phi) = E_{\theta_0}\nu \quad \text{y} \quad N(\theta_1; \phi) = E_{\theta_1}\nu, \tag{12}$$

mismas que tienen que ver con la regla de paro pero no con la regla de decisión.

Antes que nada, vamos a expresar las características (10-12) en terminos de los elementos del modelo y de la prueba.

De manera general, a la probabilidad de *rechazar* H_0 suponiendo que el valor verdadero del parámetro es θ

$$m(\theta; \phi, \delta) = P_\theta(\text{rechazar } H_0)$$

se le llama *función de potencia* de la prueba (ϕ, δ).

De (10) se sigue que

$$\alpha(\phi, \delta) = m(\theta_0; \phi, \delta) \tag{13}$$

y de (11) que

$$\beta(\phi, \delta) = 1 - m(\theta_1, \phi, \delta), \tag{14}$$

así que nos enfocamos en el cálculo de $m(\theta; \phi, \delta)$.

Como

$$\begin{aligned} m(\theta; \phi, \delta) = P_\theta(\text{rechazar } H_0) &= \sum_{n=1}^{\infty} P_\theta(\text{rechazar } H_0 \text{ siendo } \nu = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_\theta(\delta_n = 1,\ \nu = n), \end{aligned} \tag{15}$$

y, recordando que $\nu = n$ si y sólamente si $\chi_n = 1$ (ver (5) y el párrafo que le sigue), tenemos

$$m(\theta; \phi, \delta) = \sum_{n=1}^{\infty} E_\theta \chi_n \delta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum \chi_n \delta_n \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i). \tag{16}$$

Para que (15) sea valido necesitamos que

$$P_\theta(\nu < \infty) = 1, \quad \text{para} \quad \theta = \theta_0 \quad \text{y} \quad \theta = \theta_1, \tag{17}$$

y a partir de este momento lo vamos a estar suponiendo, argumentando que por razones prácticas el valor infinito de ν es inaceptable.

Muy parecido a (15)-(16) tenemos

$$N(\theta; \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} n P_\theta(\nu = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n E_\theta \chi_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \sum \chi_n \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i), \tag{18}$$

con lo que finalizamos el cálculo de las características de una prueba secuencial.

3. Optimalidad de las pruebas secuenciales

Esta es la parte principal del curso en la que se va a plantear el problema de optimalidad de las pruebas secuenciales y se va a proporcionar su completa solución.

3.1. **Planteamiento del problema.** El problema clásico del análisis secuencial es hallar la forma de la prueba que minimiza el número promedio de observaciones en la clase de todas las pruebas cuyas probabilidades de error no excedan ciertas cotas dadas.

Es decir, se considera la clase $\Delta(\alpha, \beta)$ de las pruebas (ψ, δ) que satisfacen las desigualdades

$$\alpha(\phi, \delta) \leq \alpha \quad \text{y} \quad \beta(\phi, \delta) \leq \beta, \tag{19}$$

α y β siendo algunos dos números, $0 < \alpha < 1$ y $0 < \beta < 1$. El objetivo es hallar una prueba en $\Delta(\alpha, \beta)$ con el valor de $N(\theta_0; \psi)$ (y/o $N(\theta_1; \psi)$) mínimo en esta clase.

De antemano no queda claro si existe una prueba que minimiza *los dos* valores promedio, $N(\theta_0; \psi)$ *y* $N(\theta_1; \psi)$. Por esto vemos un problema menos ambicioso: hallar una prueba con el valor mínimo de $N(\theta_0; \psi)$ en $\Delta(\alpha, \beta)$.

En realidad, la prueba que vamos a encontrar también va a minimizar $N(\theta_1; \psi)$. Pero no lo consideramos de mucha importancia, por lo menos no la teórica, por la siguiente razón. Como θ_0 y θ_1 son intercambiables, al resolver el problema de minimización de $N(\theta_0; \psi)$ tendrémos también una prueba que minimiza $N(\theta_1; \psi)$ en $\Delta(\alpha, \beta)$. Es curioso que resulta la misma prueba, pero es pura casualidad, y no el resultado de nuestra voluntad, deseo y/o esfuerzos. Por esta razón lo dejamos fuera del curso.

3.2. **Reducción a un problema de optimización sin restricciones. Método variacional de Lagrange.** Es conveniente representar el problema planteado en la sección anterior en terminos del costo del experimento.

Siendo el costo unitario de observaciones $c > 0$, el costo total promedio del experimento secuencial, gobernado por una regla de paro ψ, es $C(\psi) = E_{\theta_0}(c\nu) = cN(\theta_0; \psi)$. Así que el problema planteado en la sección anterior es equivalente a minimizar el costo promedio del experimento $C(\psi)$ dado que las probabilidades de error del procedimiento de prueba satisfacen (19).

El problema planteado representa un caso particular de los problemas de optimización con restricciones siendo la función objetivo $C(\psi)$ y las restricciones las desigualdades en (19).

Para solución de problemas de optimización con restricciones se conoce el método de multiplicadores de Lagrange. Ya que el argumento de la función objetivo $C(\psi)$, a su vez, es una *función*, en este caso se le llama al método *variacional*.

El método consiste en reducción del problema con restricciones a un problema de optimización sin restricciones, incorporando las restricciones en una nueva función objetivo llamada función de Lagrange.

En el caso que nos interesa, la función de Lagrange adquiere la forma

$$L(\psi,\delta) = C(\psi) + \lambda_0\alpha(\psi,\delta) + \lambda_1\beta(\psi,\delta), \tag{20}$$

donde $\lambda_0 \geq 0$ y $\lambda_1 \geq 0$ son dos constantes cualesquiera llamadas multiplicadores.

El siguiente teorema representa la reducción del problema con restricciones a un problema sin restricciones en la que propiamente consiste el método de multiplicadores de Lagrange.

Teorema 1. *Sea (ψ^*,δ^*) una prueba tal que para cualquier otra prueba secuencial (ψ,δ)*

$$L(\psi,\delta) \geq L(\psi^*,\delta^*), \tag{21}$$

y tal que

$$\alpha(\psi^*,\delta^*) = \alpha, \quad y \quad \beta(\psi^*,\delta^*) = \beta. \tag{22}$$

Entonces para cualquier prueba (ψ,δ) que satisface

$$\alpha(\psi,\delta) \leq \alpha, \quad y \quad \beta(\psi,\delta) \leq \beta \tag{23}$$

se tiene

$$C(\psi) \geq C(\psi^*). \tag{24}$$

La desigualdad en (24) es estricta si es estricta alguna de las desigualdades en (23).

Nota 1. Es obvio que (22) garantiza que $(\psi^*,\delta^*) \in \Delta(\alpha,\beta)$, así que (24) representa la optimalidad de (ψ^*,δ^*) en la clase $\Delta(\alpha,\beta)$ desde el punto de vista del costo promedio del experimento.

Demostración. Sea (ψ^*,δ^*) que satisface (21) y (22). Entonces para cualquier otra prueba (ψ,ϕ) que satisface (23) tenemos

$$C(\psi) + \lambda_0\alpha + \lambda_1\beta \geq C(\psi) + \lambda_0\alpha(\psi,\delta) + \lambda_1\beta(\psi,\delta) \tag{25}$$

$$= L(\psi,\delta) \geq L(\psi^*,\delta^*) = C(\psi^*) + \lambda_0\alpha(\psi^*,\delta^*) + \lambda_1\beta(\psi^*,\delta^*) \tag{26}$$

$$= C(\psi^*) + \lambda_0\alpha + \lambda_1\beta. \tag{27}$$

Comparando el lado izquierdo de la cadena de desigualdades (25)-(27) con su lado derecho en (27) concluimos que

$$C(\psi) \geq C(\psi^*),$$

lo que demuestra la primera parte del teorema. Más que esto, si ahora $C(\psi) = C(\psi^*)$ para alguna prueba (ψ,δ), entonces *todas* las desigualdades en (25)-(27) en realidad tienen que ser igualdades, por lo que $\alpha(\psi,\delta) = \alpha$ *y* $\beta(\psi,\delta) = \beta$, y esto concluye la demostración. □

El teorema 1 nos permite dedicar a la solución del problema de minimización de $L(\psi,\delta)$ (ver la condición (21)). Como hay dos constantes arbitrarias (λ_0,λ_1) en la prueba (ψ^*,δ^*), se puede esperar que variando éstas uno puede cumplir con las condiciones (22). De cierta forma, las condiciones (22) son automáticas, ya que una vez que exista una prueba (ψ^*,δ^*) que satisface (21), la condición (22) se cumple si tomamos $\alpha=\alpha(\psi^*,\delta^*)$ y $\beta=\beta(\psi^*,\delta^*)$. De hecho, es precisamente el sentido que se le da a la optimalidad de la prueba SPRT (ver [1],[3],[4],[8],[9],[10],[11]).

3.3. **Reducción al problema de paro óptimo.** Del Teorema 1 vemos que para hallar la forma de la prueba óptima necesitamos saber minimizar la función de Lagrange $L(\psi,\delta)$. En esta sección este problema recibe una resolución parcial: resulta posible dar una regla de decisión δ^* óptima en el sentido de que para cualquier otra regla de decisión

$$L(\psi,\delta)\geq L(\psi,\delta^*).$$

Para introducir δ^* necesitamos la siguiente notación.

Sea

$$f_i^n=f_i^n(X_1,X_2,\dots,X_n)=\prod_{j=1}^n f_{\theta_i}(X_j),\quad i=0,1.$$

De manera general, vamos a estar denotando I_A la función indicadora del evento A, es decir,

$$I_A=\begin{cases}1 & \text{si } A \text{ ocurre,}\\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

En particular, sea

$$\delta_n^*=I_{\{\lambda_0 f_0^n\leq\lambda_1 f_1^n\}}=\begin{cases}1 & \text{si } \lambda_0 f_0^n\leq\lambda_1 f_1^n,\\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}\tag{28}$$

Por fin, sea $\delta^*=(\delta_1^*,\delta_2^*,\dots,\delta_n^*,\dots)$.

Teorema 2. *Para cualquier regla de paro ψ y cualquier regla de decisión δ*

$$L(\psi,\delta)\geq L(\psi,\delta^*).\tag{29}$$

Para el valor de $L(\psi,\delta^*)$ se tiene la siguiente expresión

$$L(\psi,\delta^*)=C(\psi)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum\chi_n\min\{\lambda_0 f_0^n,\lambda_1 f_1^n\}\tag{30}$$

con χ_n que está dada por la fórmula (5).

Demostración. Por la definición de la función de Lagrange (20) se trata de demostrar que

$$\lambda_0\alpha(\psi,\delta)+\lambda_1\beta(\psi,\delta)\geq\lambda_0\alpha(\psi,\delta^*)+\lambda_1\beta(\psi,\delta^*), \tag{31}$$

y que

$$\lambda_0\alpha(\psi,\delta^*)+\lambda_1\beta(\psi,\delta^*)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum\chi_n\min\{\lambda_0 f_0^n,\lambda_1 f_1^n\} \tag{32}$$

La clave de esta demostración (y de varias demostraciones más adelante) es el siguiente sencillo

Lema 1. *Sea x una variable con un número finito de valores y sea $F(x)$ cualquier función de x. Entonces para cualesquiera funciones $\phi(x)$, $\chi(x)$, $0\leq\phi(x),\chi(x)\leq 1$, se tiene*

$$\sum\chi(x)\phi(x)F(x)\geq\sum\chi(x)F(x)I_{\{F(x)\leq 0\}} \tag{33}$$

Demostración. Mostremos que

$$\sum\chi(x)\phi(x)F(x)-\sum\chi(x)F(x)I_{\{F(x)\leq 0\}}\geq 0, \tag{34}$$

o, de manera equivalente, que

$$\sum\chi(x)F(x)(\phi(x)-I_{\{F(x)\leq 0\}})\geq 0, \tag{35}$$

Para ello, notemos que $F(x)(\phi(x)-I_{\{F(x)\leq 0\}})\geq 0$ para cualquier x, ya que

- si $F(x)\leq 0$ entonces $\phi(x)-I_{\{F(x)\leq 0\}}=\phi(x)-1\leq 0$, y por lo tanto su producto es no negativo,
- si $F(x)>0$ entonces $\phi(x)-I_{\{F(x)\leq 0\}}=\phi(x)\geq 0$, y su producto también es no negativo.

Vemos que todos los sumandos en (35) son no negativos, lo que demuestra (35), (34) y por lo tanto (33). □

Regresando a la demostración de (31) representamos el lado izquierdo de (31) utilizando las fórmulas (13),(14) y (16) como

$$\lambda_0\alpha(\psi,\delta)+\lambda_1\beta(\psi,\delta)=\lambda_1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum\chi_n(\lambda_0 f_0^n-\lambda_1 f_1^n)\delta_n. \tag{36}$$

Aplicando el Lema 1 a $\sum\chi_n(\lambda_0 f_0^n-\lambda_1 f_1^n)\delta_n$ en el lado derecho de (36) tenemos que

$$\lambda_0\alpha(\psi,\delta)+\lambda_1\beta(\psi,\delta)\geq\lambda_1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum\chi_n(\lambda_0 f_0^n-\lambda_1 f_1^n)I_{\{\lambda_0 f_0^n-\lambda_1 f_1^n\leq 0\}} \tag{37}$$

$$= \lambda_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum \chi_n (\lambda_0 f_0^n - \lambda_1 f_1^n) \delta_n^* = \lambda_0 \alpha(\psi, \delta^*) + \lambda_1 \beta(\psi, \delta^*). \tag{38}$$

La desigualdad (31) queda demostrada. Tamién tenemos un paso hacia (32), ya que según (37)-(38)

$$\lambda_0 \alpha(\psi, \delta^*) + \lambda_1 \beta(\psi, \delta^*) = \lambda_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum \chi_n (\lambda_0 f_0^n - \lambda_1 f_1^n) I_{\{\lambda_0 f_0^n - \lambda_1 f_1^n \leq 0\}}. \tag{39}$$

Tomando en cuenta la condición (17) tenemos

$$P_{\theta_1}(\nu < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum \chi_n f_1^n = 1,$$

por lo que el lado derecho de (39) se transforma en

$$\lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} \sum \chi_n f_1^n + \sum_{n=1}^{\infty} \sum \chi_n (\lambda_0 f_0^n - \lambda_1 f_1^n) I_{\{\lambda_0 f_0^n - \lambda_1 f_1^n \leq 0\}} \tag{40}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum \chi_n \left[(\lambda_0 f_0^n - \lambda_1 f_1^n) I_{\{\lambda_0 f_0^n - \lambda_1 f_1^n \leq 0\}} + \lambda_1 f_1^n \right] \tag{41}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum \chi_n \min\{\lambda_0 f_0^n, \lambda_1 f_1^n\} \tag{42}$$

lo que demuestra (32) y por lo tanto (30). □

Denotemos

$$L(\psi) = C(\psi) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum \chi_n \min\{\lambda_0 f_0^n, \lambda_1 f_1^n\}. \tag{43}$$

Según el Teorema 2 $L(\psi)$ es el mínimo de $L(\psi, \delta)$ sobre *todas las reglas de decisión* δ. De esta manera el problema de minimización de $L(\psi, \delta)$ se convierte en un problema de paro óptimo, ya que $L(\psi)$ depende únicamente de la regla de paro.

El objetivo, a partir de este momento, será hallar la regla de paro ψ^* tal que

$$L(\psi) \geq L(\psi^*) \tag{44}$$

para cualquier regla de paro ψ.

Con esto será resuelto el problema de la prueba óptima ya que para cualquier prueba (ψ, δ), por el Teorema 2,

$$L(\psi, \delta) \geq L(\psi, \delta^*) = L(\psi) \geq L(\psi^*) = L(\psi^*, \delta^*),$$

así que la prueba óptima será (ψ^*, δ^*).

3.4. **Paro óptimo. Caso truncado.** En esta sección vamos a resolver el problema de paro óptimo planteado en la sección anteror, en la clase de tiempos de paro truncados.

Sea N el número máximo de pasos que puede realizar una prueba, es decir, sólamente estamos permitiendo las reglas de paro ψ con $\psi_N \equiv 1$, en lo demás siendo éstas arbitrarias. Entonces, la única parte variable de las reglas de paro será $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{N-1}$, lo que hace posible la solución completa del problema.

Empezamos por darle a la función $L(\psi)$ una forma más conveniente:

$$L(\psi) = C(\psi) + \sum_{n=1}^{N} \sum \chi_n \min\{\lambda_0 f_0^n, \lambda_1 f_1^n\}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \sum \chi_n (cnf_1^n + \min\{\lambda_0 f_0^n, \lambda_1 f_1^n\})$$

y más explícita

$$L(\psi) = \sum_{n=1}^{N} \sum (1-\psi_1)\ldots(1-\psi_{n-1})\psi_n (cnf_1^n + \min\{\lambda_0 f_0^n, \lambda_1 f_1^n\}),$$

y, tomando en cuenta que $\psi_N \equiv 1$ y denotando $l_n = \min\{\lambda_0 f_0^n, \lambda_1 f_1^n\}$, la forma final

$$L(\psi) = \sum_{n=1}^{N-1} \sum (1-\psi_1)\ldots(1-\psi_{n-1})\psi_n (cnf_1^n + l_n)$$
$$+ \sum (1-\psi_1)\ldots(1-\psi_{N-1}) \left(cNf_1^N + l_N\right). \tag{45}$$

El siguiente lema absorbe la mayor parte de la carga técnica en el desarrollo de la regla truncada óptima.

Lema 2. *Sean $r \geq 2$ y $v_r = v_r(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ una función cualquiera. Entonces*

$$\sum_{n=1}^{r-1} \sum (1-\psi_1)\ldots(1-\psi_{n-1})\psi_n (cnf_0^n + l_n)$$
$$+ \sum (1-\psi_1)\ldots(1-\psi_{r-1}) \left(crf_0^r + v_r\right)$$
$$\geq \sum_{n=1}^{r-2} \sum (1-\psi_1)\ldots(1-\psi_{n-1})\psi_n (cnf_0^n + l_n) \tag{46}$$
$$+ \sum (1-\psi_1)\ldots(1-\psi_{r-2}) \left(c(r-1)f_0^{r-1} + v_{r-1}\right),$$

en donde

$$v_{r-1} = \min\{l_{r-1}, cf_0^{r-1} + \sum_{x_r} v_r\} \tag{47}$$

y la desigualdad en (46) se convierte en igualdad si

$$\psi_{r-1} = I_{\{l_{r-1} \leq cf_0^{r-1} + \sum_{x_r} v_r\}}. \tag{48}$$

Demostración. Para demostrar la desigualdad (46) es suficiente mostrar que

$$\begin{aligned}\sum(1-\psi_1)\dots(1-\psi_{r-2})\psi_{r-1}(c(r-1)f_0^{r-1}+l_{r-1})\\ +\sum(1-\psi_1)\dots(1-\psi_{r-1})\left(crf_0^r+v_r\right)\\ \geq \sum(1-\psi_1)\dots(1-\psi_{r-2})\left(c(r-1)f_0^{r-1}+v_{r-1}\right).\end{aligned} \tag{49}$$

El lado izquierdo de (49) es igual a

$$\begin{aligned}&\sum_{x_1,\dots,x_{r-1}}(1-\psi_1)\dots(1-\psi_{r-2})\psi_{r-1}(c(r-1)f_0^{r-1}+l_{r-1})\\ &\quad+\sum_{x_1,\dots,x_r}(1-\psi_1)\dots(1-\psi_{r-1})\left(crf_0^r+v_r\right)\\ &=\sum_{x_1,\dots,x_{r-1}}(1-\psi_1)\dots(1-\psi_{r-2})\Big[\psi_{r-1}(c(r-1)f_0^{r-1}+l_{r-1})\\ &\quad+(1-\psi_{r-1})\sum_{x_r}\left(crf_0^r+v_r\right)\Big]\end{aligned} \tag{50}$$

Por la definición de f_0^r

$$\sum_{x_r} crf_o^r = \sum_{x_r} cr\prod_{i=1}^{r} f_{\theta_0}(x_i) = cr\prod_{i=1}^{r-1} f_{\theta_0}(x_i)\sum_{x_r} f_{\theta_0}(x_r) = crf_0^{r-1},$$

en virtud de (1), así que el lado derecho de (50) se transforma en

$$\begin{aligned}&\sum_{x_1,\dots,x_{r-1}}(1-\psi_1)\dots(1-\psi_{r-2})[c(r-1)f_0^{r-1}\\ &\quad+\psi_{r-1}l_{r-1}+(1-\psi_{r-1})(cf_0^{r-1}+\sum_{x_r} v_r)].\end{aligned} \tag{51}$$

Aplicando el Lema 1 con

$$\begin{aligned}\chi &= (1-\psi_1)\dots(1-\psi_{r-2}),\\ \phi &= \psi_{r-1}\\ F &= l_{r-1}-(cf_0^{r-1}+\sum_{x_r} v_r))\end{aligned}$$

vemos que (51) es mayor o igual que

$$\sum_{x_1,\dots,x_{r-1}} \qquad (1-\psi_1)\dots(1-\psi_{r-2})[c(r-1)f_0^{r-1} + (cf_0^{r-1} + \sum_{x_r} v_r)$$

$$+(l_{r-1} - (cf_0^{r-1} + \sum_{x_r} v_r))I_{\{l_{r-1}\le cf_0^{r-1}+\sum_{x_r} v_r\}}]$$

$$= \sum_{x_1,\dots,x_{r-1}} (1-\psi_1)\dots(1-\psi_{r-2})[c(r-1)f_0^{r-1}$$

$$+\min\{l_{r-1}, cf_0^{r-1} + \sum_{x_r} v_r\}], \tag{52}$$

lo que coincide con el lado derecho de (49) si tomamos en cuenta la definición (47).

Más que esto, por el mismo Lema 1 (51) es igual a (52) si

$$\psi_{r-1} = I_{\{l_{r-1}\le cf_0^{r-1}+\sum_{x_r} v_r\}}.$$ □

El Lema 2 se aplica inmediatamente a la función $L(\psi)$ (ver (45) y definir $v_N \equiv l_N$). Denotemos $V_N^N = v_N$. Por el Lema 2

$$L(\psi) \ge \sum_{n=1}^{N-2} \sum (1-\psi_1)\dots(1-\psi_{n-1})\psi_n(cnf_0^n + l_n)$$

$$+\sum (1-\psi_1)\dots(1-\psi_{N-2})\left(c(N-1)f_0^{N-1} + v_{N-1}\right), \tag{53}$$

donde $v_{N-1} = \min\{l_{N-1}, cf^{N-1} + \sum_{x_N} v_N\}$. Sea también $V_{N-1}^N = v_{N-1}$. Por el Lema 2 la desigualdad en (53) es en realidad igualdad si

$$\psi_{N-1} = I_{\{l_{N-1}\le cf_0^{N-1}+\sum_{x_N} V_N^N\}}. \tag{54}$$

Aplicando al lado derecho de (53) nuevamente el Lema 2 vemos que

$$L(\psi) \ge \sum_{n=1}^{N-3} \sum (1-\psi_1)\dots(1-\psi_{n-1})\psi_n(cnf_0^n + l_n)$$

$$+\sum (1-\psi_1)\dots(1-\psi_{N-3})\left(c(N-2)f_0^{N-2} + v_{N-2}\right), \tag{55}$$

donde $v_{N-2} = \min\{l_{N-2}, cf^{N-2} + \sum_{x_{N-1}} v_{N-1}\}$. Definamos también $V_{N-2}^N = v_{N-2}$. La igualdad en (55) se alcanza si se cumple (54) y

$$\psi_{N-2} = I_{\{l_{N-2}\le cf_0^{N-2}+\sum_{x_{N-1}} V_{N-1}^N\}}. \tag{56}$$

Nuevamente aplicamos el Lema 2 al lado derecho de (55). Obtenemos otra cota para $L(\psi)$, más baja, y una nueva ψ_{N-3} para que ésta sea alcanzada, etc. hasta obtener la cota en forma

$$L(\psi) \ge \sum \left(cf_0^1 + v_1\right), \tag{57}$$

y unas condiciones sobre ψ empezando por (54), (56), etc., suficientes para alcanzarla, lo que significa que estas condiciones describen la regla de paro óptima.

El resultado formal está en el siguiente

Teorema 3. *Sea ψ cualquier regla de paro truncada ($\psi_N \equiv 1$). Entonces para cualquier $1 \le r \le N-1$ se cumplen las siguientes desigualdades*

$$\begin{aligned}L(\psi) \ge \sum_{n=1}^{r} \sum (1-\psi_1)\dots(1-\psi_{n-1})\psi_n(cnf_0^n + l_n) \\ + \sum (1-\psi_1)\dots(1-\psi_r)\left(c(r+1)f_0^{r+1} + V_{r+1}^N\right) \quad (58)\\ \ge \sum_{n=1}^{r-1} \sum (1-\psi_1)\dots(1-\psi_{n-1})\psi_n(cnf_0^n + l_n) \\ + \sum (1-\psi_1)\dots(1-\psi_{r-1})\left(crf_0^r + V_r^N\right), \quad (59)\end{aligned}$$

en donde $V_N^N = l_N$ y para $k < N$

$$V_k^N = \min\{l_k, cf_0^k + \sum_{x_{k+1}} V_{k+1}^N\}. \quad (60)$$

La cota inferior en (59) se alcanza si

$$\begin{aligned}\psi_{N-1} &= I_{\{l_{N-1} \le cf_0^{N-1} + \sum_{x_N} V_N^N\}} \\ \psi_{N-2} &= I_{\{l_{N-2} \le cf_0^{N-2} + \sum_{x_{N-1}} V_{N-1}^N\}} \quad (61) \\ &\dots \\ \psi_r &= I_{\{l_r \le cf_0^r + \sum_{x_{r+1}} V_{r+1}^N\}}.\end{aligned}$$

En particular, para $r = 1$ las formulas (61) describen de manera completa la regla de paro truncada óptima.

3.5. **Paro óptimo. Caso no truncado.** En esta sección damos la forma de la regla de paro óptima en la clase de todas las pruebas secuenciales.

La base para el desarrollo son los resultados de la sección anterior.

Antes que nada, para cualquier regla de paro ψ definamos

$$\begin{aligned}L_N(\psi) = \sum_{n=1}^{N-1} \sum (1-\psi_1)\dots(1-\psi_{n-1})\psi_n(cnf_0^n + l_n) \\ + \sum (1-\psi_1)\dots(1-\psi_{N-1})\left(cNf_0^N + l_N\right). \quad (62)\end{aligned}$$

(compare con (45)). Es la función de Lagrange que corresponde a la regla ψ truncada a nivel N, es decir, la regla con las componentes $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{N-1}, 1, \ldots)$.

Por ser ésta truncada, aplican los resultados de la sección anterior, en particular, las desigualdades del Teorema 3.

La idea de lo que sigue es pasar al límite en estas desigualdades, cuando $N \to \infty$, para obtener las cotas inferiores para $L(\psi)$.

Y la primera pregunta es, ?' qué pasa con $L_N(\psi)$ cuando $N \to \infty$?

Lema 3. *Para cualquier regla de paro ψ*

$$\lim_{N\to\infty} L_N(\psi) = L(\psi)$$

Demostración. Sea $L(\psi) < \infty$, dejando la posibilidad de $L(\psi) = \infty$ hasta el final de la demostración. Calculemos la diferencia entre $L(\psi)$ y $L_N(\psi)$ para demostrar que ésta tiende a cero cuando $N \to \infty$. Por (62)

$$L(\psi) - L_N(\psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum \chi_n (cnf_0^n + l_n)$$

$$- \sum_{n=1}^{N-1} \sum \chi_n (cnf_0^n + l_n) - \sum (1-\psi_1)\ldots(1-\psi_{N-1}) \left(cNf_0^N + l_N\right)$$

$$= \sum_{n=N}^{\infty} \sum \chi_n (cnf_0^n + l_n) - \sum (1-\psi_1)\ldots(1-\psi_{N-1}) \left(cNf_0^N + l_N\right). \quad (63)$$

El primer sumando converge a cero, cuando $N \to \infty$, por ser la cola de una serie convergente (ya que $L(\psi) < \infty$).

También

$$\sum (1-\psi_1)\ldots(1-\psi_{N-1}) l_N \leq \lambda_0 \sum (1-\psi_1)\ldots(1-\psi_{N-1}) f_0^N$$

$$= P_{\theta_0}(\nu > N-1) = \sum_{n=N}^{\infty} P_{\theta_0}(\nu = n) \to 0$$

cuando $N \to \infty$, ya que $P_{\theta_0}(\nu < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{\theta_0}(\nu = n) = 1$ es convergente.

Queda por demostrar que

$$\sum (1-\psi_1)\ldots(1-\psi_{N-1}) N f_0^N = N P_{\theta_0}(\nu \geq N) \to 0 \text{ cuando } N \to \infty. \quad (64)$$

Pero esto se sige también de la condición del lema 3, la que garantiza que $L(\psi) < \infty$ y por lo tanto que $E_{\theta_0}\nu = \sum_{n=1}^{\infty} n P_{\theta_0}(\nu = n) < \infty$.

Por ser convergente esta serie $\sum_{n=N}^{\infty} nP_{\theta_0}(\nu = n) \to 0$, y aplicando la desigualdad de Chebyshev

$$NP_{\theta_0}(\nu \geq N) \leq E_{\theta_0}\nu I_{\{\nu \geq N\}} = \sum_{n=N}^{\infty} nP_{\theta_0}(\nu = n) \to 0$$

cuando $N \to \infty$, lo que demuestra (64).

Sea ahora $L(\psi) = \infty$.

Esto quiere decir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum \chi_n(cnf_0^n + l_n) = \infty$$

por lo que

$$L_N(\psi) \geq \sum_{n=1}^{N-1} \sum \chi_n(cnf_0^n + l_n) \to \infty. \qquad \square$$

La siguiente pregunta es sobre el comportamiento de las funciones V_r^N las que participan en las desigualdades del Teorema 3, cuando $N \to \infty$.

Lema 4. Para cualquier $r \geq 1$ y para cualquier $N \geq r$

$$V_r^N \geq V_r^{N+1}. \tag{65}$$

Demostración. es por inducción sobre $r = N, N-1, \ldots, 1$.

Sea $r = N$. Entonces por (60)

$$V_N^{N+1} = \min\{l_N, cf_0^N + \sum_{x_{N+1}} V_{N+1}^{N+1}\} \leq l_N = V_N^N.$$

Si suponemos que (65) se cumple para alguna r, $N \geq r > 1$ entonces

$$V_{r-1}^N = \min\{l_{r-1}, cf_0^{r-1} + \sum_{x_r} V_r^N\}$$

$$\geq \min\{l_{r-1}, cf_0^{r-1} + \sum_{x_r} V_r^{N+1}\} = V_{r-1}^{N+1}$$

así que (65) también se cumple para $r-1$, lo que concluye la inducción. $\square$

Del Lema 4 se siguie que para cualquier $r \geq 1$ la sucesión V_r^N es decreciente. Así que existe su límite al que le vamos a llamar

$$V_r = \lim_{N\to\infty} V_r^N. \tag{66}$$

Pasando al límite, cuando $N \to \infty$, en todas las desigualdades e igualdades del Teorema 3, de inmediato tenemos al

Teorema 4. *Sea ψ cualquier regla de paro. Entonces para cualquier $r \geq 1$ se cumplen las siguientes desigualdades*

$$L(\psi) \geq \sum_{n=1}^{r} \sum (1-\psi_1)\ldots(1-\psi_{n-1})\psi_n(cnf_0^n + l_n)$$

$$+ \sum (1-\psi_1)\ldots(1-\psi_r)\left(c(r+1)f_0^{r+1} + V_{r+1}\right) \tag{67}$$

$$\geq \sum_{n=1}^{r-1} \sum (1-\psi_1)\ldots(1-\psi_{n-1})\psi_n(cnf_0^n + l_n)$$

$$+ \sum (1-\psi_1)\ldots(1-\psi_{r-1})\left(crf_0^r + V_r\right). \tag{68}$$

en donde

$$V_k = \min\{l_k, cf_0^k + \sum_{x_{k+1}} V_{k+1}\} \tag{69}$$

para cualquier $k \geq 1$.

En particular, para $r = 1$, se tiene la siguiente cota inferior:

$$L(\psi) \geq c + \sum V_1. \tag{70}$$

Lo que falta en el Teorema 4, a comparación con el Teorema 3, es un elemento muy esencial: la forma de la regla de paro para alcanzar la cota inferior, misma que así resultaría óptima. Aúnque pasando al límite de manera informal en las ecuaciones (61) (empezando desde la última de ellas), cuando $N \to \infty$, uno puede imaginar que la regla óptima tiene que ser

$$\psi_r^* = I_{\{l_r \leq cf_0^r + \sum_{x_{r+1}} V_{r+1}\}}, \quad r = 1, 2, 3, \ldots. \tag{71}$$

El objetivo principal de esta sección es demostrar que la regla definida por (71) es realmente óptima.

Teorema 5. *Para cualquier prueba secuencial ψ*

$$L(\psi) \geq L(\psi^*) = c + \sum V_1. \tag{72}$$

Demostración. Sea ψ una regla de paro. Por el Teorema 4 para cualquier $r \geq 1$ fijo se cumplen las desigualdades:

$$L(\psi) \geq \sum_{n=1}^{r} \sum (1-\psi_1)\ldots(1-\psi_{n-1})\psi_n(cnf_0^n + l_n)$$

$$+ \sum (1-\psi_1)\ldots(1-\psi_r)\left(c(r+1)f_0^{r+1} + V_{r+1}\right) \tag{73}$$

$$\geq \sum_{n=1}^{r-1} \sum (1-\psi_1)\dots(1-\psi_{n-1})\psi_n(cnf_0^n + l_n)$$

$$+\sum (1-\psi_1)\dots(1-\psi_{r-1}) \left(crf_0^r + V_r \right). \tag{74}$$

$$\geq \dots$$

$$\geq \sum \psi_1(cf_0^1 + l_1) + \sum (1-\psi_1) \left(c2f_0^2 + V_2 \right) \tag{75}$$

$$\geq \sum \left(cf_0^1 + V_1 \right). \tag{76}$$

Aplicando nuevamente el Lema 2 y utilizando (69) es fácil ver que todas las desigualdades excepto, tal vez, la primera van a ser igualdades para la regla

$$(\psi_1^*, \psi_2^*, \dots, \psi_r^*, 1, \dots).$$

En particular, esto significa que existe el límite

$$\lim_{r\to\infty} [\sum_{n=1}^{r} \sum (1-\psi_1^*)\dots(1-\psi_{n-1}^*)\psi_n^*(cnf_0^n + l_n)$$

$$+\sum (1-\psi_1^*)\dots(1-\psi_r^*) \left(c(r+1)f_0^{r+1} + V_{r+1} \right)] = \sum \left(cf_0^1 + V_1 \right). \tag{77}$$

De esto se sigue inmediatamente que también existe el límite

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{n=1}^{r} \sum [(1-\psi_1^*)\dots(1-\psi_{n-1}^*)\psi_n^*(cnf_0^n + l_n) \leq \sum \left(cf_0^1 + V_1 \right). \tag{78}$$

Pero el lado izquierdo de (78) es $L(\psi^*)$ y por lo tanto

$$L(\psi^*) \leq \sum \left(cf_0^1 + V_1 \right). \tag{79}$$

Por otro lado en virtud de (73)-(76)

$$L(\psi^*) \geq \sum \left(cf_0^1 + V_1 \right),$$

lo que junto con (79) demuestra que

$$L(\psi^*) = \sum \left(cf_0^1 + V_1 \right),$$

y de (73)-(76) se sigue que ψ^* es una regla de paro óptima. $\square$

3.6. **La prueba secuencial de la razón de probabilidades.** En esta sección mostramos que la prueba óptima obtenida en la sección anterior es equivalente a la famosa prueba secuencial de la razón de probabilidades (*Sequential Probability Ratio Test, SPRT*).

Para evitar complicaciones técnicas (nada esenciales, por cierto) supongamos que para todos los valores x

$$f_{\theta_0}(x) > 0, \quad \text{y} \quad f_{\theta_1}(x) > 0.$$

Definamos como

$$Z_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{f_{\theta_1}(x_i)}{f_{\theta_0}(x_i)} = \frac{f_1^n}{f_0^n} \tag{80}$$

la llamada *razón de probabilidades*, $n = 1, 2, \ldots$

Para expresar los elementos de la regla de paro óptima en términos de Z_n es conveniente definir, con base en las funciones V_r^N unas nuevas, U_r^N:

$$U_r^N = V_r^N / f_0^r, \tag{81}$$

No es difícil ver que todas las funciones U_r^N dependen de las observaciones $x_1, x_2, \ldots, x_r$ sólo a través de Z_r. Efectivamente,

$$U_N^N = U_N^N(Z_N) = \min\{\lambda_0, \lambda_1 Z_N\} = g(Z_N) \tag{82}$$

(sea, por definición, $g(z) = \min\{\lambda_0, \lambda_1 z\}$), y para $r < N$

$$U_r^N = U_r^N(Z_r) = \min\left\{ g(Z_r), c + \sum_{x_{r+1}} f_{\theta_0}(x_{r+1}) U_{r+1}^N \left(Z_r \frac{f_{\theta_1}(x_{r+1})}{f_{\theta_0}(x_{r+1})} \right) \right\} \tag{83}$$

En particular, de (82)-(83) se ve que en realidad todas las funciones U_r^N se obtienen con base en la siguiente sucesión de funciones $\rho_n = \rho_n(z)$: sea

$$\rho_0(z) = g(z), \tag{84}$$

y recursivamente para $n = 1, 2, \ldots$

$$\rho_n(z) = \min\left\{ g(z),\ c + \sum_{x} f_{\theta_0}(x) \rho_{n-1}\left(z \frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)} \right) \right\}. \tag{85}$$

De tal forma que

$$U_N^N = \rho_0(Z_N),\ U_{N-1}^N = \rho_1(Z_{N-1}), \ldots, U_r^N = \rho_{N-r}(Z_r). \tag{86}$$

De los resultados de la sección anterior ya sabemos que existe

$$\lim_{N\to\infty} V_r^N = V_r,$$

así que debido a (81) también existe

$$\lim_{N\to\infty} U_r^N = U_r = V_r / f_0^r.$$

Y, por (86),

$$U_r = \lim_{N\to\infty} \rho_{N-r}(Z_r) = \rho(Z_r), \tag{87}$$

siendo, por definición,

$$\rho(z) = \lim_{n\to\infty} \rho_n(z).$$

Pasando al límite en (85), cuando $n \to \infty$, tenemos que para la función ρ se cumple la siguiente igualdad:

$$\rho(z) = \min\left\{ g(z),\ c + \sum_x f_{\theta_0}(x)\rho\left(z\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)}\right)\right\}. \tag{88}$$

A está le vamos a llamar la *ecuación de la programación dinámica.*

Ahora estamos preparados para expresar la regla de paro óptima del Teorema 5 en términos de la razón de probabilidades Z_n. Expresando V_{r+1} y todos los demás elementos de la fórmula (71) en términos de Z_r, tenemos

$$\psi_r^* = I_{\left\{ g(Z_r)\le c+\sum_x f_{\theta_0}(x)\rho\left(Z_r\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)}\right)\right\}}. \tag{89}$$

El resultado de (89) ya es mucho más explícito que (71). Pero se le puede dar una forma todavía más específica demostrando que la desigualdad que define el paro en (89):

$$g(z) \le c + \sum_x f_{\theta_0}(x)\rho\left(z\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)}\right) \tag{90}$$

equivale a simplemente

$$z \notin (A, B) \tag{91}$$

con ciertas constantes A y B, tales que $0 < A < B < \infty$, por lo tanto quedando (89) en forma

$$\psi_r^* = I_{\{Z_r \notin (A,B)\}}.$$

En lo que resta de esta sección, nos ocupamos de este detalle técnico, de la equivalencia entre (90) y (91). De una vez vamos a ver qué forma obtiene, en términos de A y B, la regla de decisión óptima de (28).

Básicamente, se va a tratar de las propiedades de las funciones $\rho_n(z)$ y su límite, $\rho(z)$, de las cuales las más importantes se demuestran en el siguiente

Lema 5. *Las funciones $\rho_n(z)$ definidas en (84)-(84)y la función $\rho(z)$ todas poseen las siguientes propiedades:*

i) *son cóncavas y continuas en* $[0, \infty)$*,*
ii) *son no decrecientes en* $[0, \infty)$*,*
iii) $\rho_n(0) = \rho(0) = 0$ *y* $\rho_n(\infty) = \rho(\infty) = \lambda_0$*,*

Demostración.

i) Demostramos por inducción que ρ_n son cóncavas.

Para n=0 $\rho_0(z) = g(z)$ es cóncava como mínimo de dos funciones cóncavas (en este caso, en particular, lineales).

Supongamos que $\rho_n(z)$ es cóncava. Entónces por (85) ρ_{n+1} es mínimo entre una función cóncava y una suma de funciones cóncavas. Entonces ρ_{n+1} es cóncava también.

El límite puntual de una sucesión de funciones cóncavas es una función cóncava, así que $\rho(z) = \lim_{n\to\infty} \rho_n(z)$ también es cóncava.

Como $\rho(z) \geq 0$ (por ser el límite de funciones no negativas) y $\rho(z)$ es cóncava entonces ρ es continua en $(0,\infty)$ (ver, por ejemplo sección 3.18 de [7]). Además es continua en 0 ya que $\rho(z) \leq g(z) \to 0 = \rho(0)$, $z \to 0$, entonces $\rho(z)$ es continua en $[0,\infty)$.

ii) También por inducción. Para $n = 0$ es obvio.

Si $r_n(z)$ es no decreciente entonces por (85) ρ_{n+1} es no decreciente también.

El límite puntual de funciones no decrecientes es una función no decreciente, así que $\rho(z)$ lo es también.

iii) El hecho de que $\rho_n(0) = 0$ fácilmente se demuestra por inducción. Por lo tanto $\rho(0) = \lim_{n\to\infty} \rho_n(0) = 0$.

También por inducción $\rho_n(\infty) = \lambda_0$.

Por ii) el límite $\lim_{z\to\infty} \rho(z) = \lambda$ existe. Pasando al límite, cuando $z \to \infty$, en (88) vemos que $\lambda = \min\{\lambda_0, c+\lambda\}$ por lo que $\lambda = \lambda_0$ □

Sea

$$h(z) = \sum_x f_{\theta_0}(x)\rho\left(z\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)}\right).$$

Definamos

$$A = \sup\{z : 0 \leq z \leq \lambda_0/\lambda_1,\ c + h(z) \geq g(z)\}$$

$$B = \inf\{z : \lambda_0/\lambda_1 \leq z,\ c + h(z) \geq g(z)\}$$

Ya que $c + h(0) = c > g(0) = 0$ y $c + h(\infty) = c + \lambda_0 > g(\infty) = \lambda_0$ resulta que $A > 0$ y $B < \infty$.

Por otro lado, si $A = B = \lambda_0/\lambda_1$ entonces $c+h(z) \geq g(z)$ para cualquier $z \geq 0$, así que el tiempo de paro óptimo es $\nu = 1$.

En otro caso $A < B$. Vamos a estar suponiéndolo.

Lema 6. *$A < z < B$ si y solamente si $g(z) > c + h(z)$.*

Demostración. Por continuidad de todas las funciones $g(A) = c + h(A)$ y $g(B) = c+h(B)$. Además por definición $c+h(z) < g(z)$ para $z \in [A, \lambda_0/\lambda_1]$. También por definición $c + h(z) < g(z)$ para $z \in [\lambda_0/\lambda_1, B)$. Ahora si

$z \in [0, A)$ entonces existe $1 \geq a > 0$ tal que $z = (1-a)A$. Como $h(0) = 0$ por concavidad de $h(z)$ se tiene

$$h((1-a)A) \geq (1-a)h(A) = (1-a)(g(A)-c).$$

Así que

$$\begin{aligned} c + h(z) \geq c + (1-a)(g(A)-c) = ac + (a-1)g(A) > (1-a)g(A) \\ = g((1-a)A) = g(z). \end{aligned}$$

es decir, $c + h(z) > g(z)$.

De manera parecida se demuestra que si $z \in (B, \infty)$ entonces también $c + h(z) > g(z)$. □

La regla de decisión óptima siempre es

$$\delta_n^* = I_{\{\lambda_0 f_0^n \leq \lambda_1 f_1^n\}}$$

así que es equivalente a

$$\delta_n^* = I_{\{\lambda_0/\lambda_1 \leq Z_n\}}.$$

Como $B \geq \lambda_0/\lambda_1 \geq A$ resulta que la prueba óptima termina en el momento

$$\nu = \inf\{n \geq 1 : Z_n \notin (A, B)\}$$

rechazando H_0 si $Z_\nu \geq B$ y aceptándola si $Z_\nu \leq A$.

Todo lo anterior da lugar al

Teorema 6. *La prueba basada en ψ^* del Teorema 5 es la llamada SPRT con*

$$\nu^* = \inf\{n \geq 1 : Z_n \notin (A, B)\} \tag{92}$$

que rechaza H_0 si $Z_\nu \geq B$ y acepta H_0 si $Z_\nu \leq A$.

Vemos que la SPRT del Teorema 6 es óptima si A y B se determinan de las ecuaciones

$$g(A) = c + \sum_x f_{\theta_0}\rho(A\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)}), \quad A \leq \lambda_0/\lambda_1 \tag{93}$$

y

$$g(B) = c + \sum_x f_{\theta_0}\rho(B\frac{f_{\theta_1}(x)}{f_{\theta_0}(x)}), \quad B \geq \lambda_0/\lambda_1, \tag{94}$$

(ver la definición de A y B arriba y la demostración del Lema 6).

Sin embargo, únicamente el caso de $1 \in (A, B)$ tiene sentido práctico, ya que en otro caso se puede lograr un mejor resultado ¡sin observar ningún dato!

Efectivamente, el hecho de $1 \notin (A, B)$ por el Lema 6 significa que

$$g(1) \leq c + \sum_x f_{\theta_0}\rho(\frac{f_{\theta_1}}{f_{\theta_0}}) \tag{95}$$

siendo el lado derecho de (95) el mínimo absoluto de la función $L(\psi)$ sobre todos los tiempos de paro que definitivamente toman *por lo menos una* observación (!'Teorema 5!). Pero $g(1) = \min\{\lambda_0, \lambda_1\}$ es, por decirlo así, «la función $L(\psi_0)$» de una prueba que no toma ninguna observación. Efectivamente, si no tomamos ninguna, el costo del experimento $C(\psi_0)$ es nulo. Si aplicamos la regla de decisión

$$\delta_0 = I_{\{\lambda_0 \leq \lambda_1\}},$$

entonces

$$\alpha(\psi_0, \delta_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda_0 \leq \lambda_1 \\ 0 & \text{si } \lambda_0 > \lambda_1 \end{cases}$$

y

$$\beta(\psi_0, \delta_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda_0 \leq \lambda_1 \\ 1 & \text{si } \lambda_0 > \lambda_1, \end{cases}$$

así que

$$L(\psi_0, \delta_0) = C(\psi_0) + \lambda_0 \alpha(\psi_0, \delta_0) + \lambda_1 \beta(\psi_0, \delta_0) = \min\{\lambda_0, \lambda_1\} = g(1).$$

Vemos que si se cumple (95) entonces hay una prueba trivial (ψ_0, δ_0) que da un mejor resultado que la mejor prueba que toma por lo menos una observación. !'Ni modo que estemos peleando por el procedimiento óptimo obligándonos a tomar por lo menos una observación si se puede conseguir algo mejor sin observar nada! Así que sólamente en el caso $A < 1 < B$ tiene sentido práctico la prueba secuencial del Teorema 6.

El caso «límite» de $1 = A < B$ o $A < B = 1$ puede ser incluido en consideración, por lo menos para los fines teóricos, ya que en este caso la prueba trivial da exactamente lo mismo que la SPRT, no algo *menor*.

La cuestión de determinación de las constantes A y B de la SPRT en el Teorema 6 se reduce a la solución de las ecuaciones (93) y (94), así que no es nada explícita.

Aúnque se ve bien verosímil que *para cualesquiera* constantes A y B tales que $0 < A \leq 1 \leq B < \infty$, $A < B$, existen constantes c, λ_0 y λ_1 con las cuales $L(\psi)$ es minimizada por la SPRT (92), ya que sólo hay dos restricciones por cumplir: (93) y (94), y las variables son tres: c, λ_0 y λ_1.

Sin embargo, la demostración formal de esto sería demasiado técnica para un curso como éste y además prácticamente no llevaría nada de cuestiones estadísticas o probabilísticas así que la dejamos para una ocasión más adecuada. No obstante, el teorema formalizando lo anterior quedaría así .

Teorema 7. *Sean A y B dos constantes tales que $0 < A \leq 1 \leq B < \infty$, $A < B$ y sea (ψ^*, δ^*):*

$$\psi_n^* = I_{\{Z_n \notin (A,B)\}},$$
$$\delta_n^* = I_{\{Z_n \geq B\}},$$

una prueba SPRT.

Entonces existen $c > 0$, $\lambda_0 > 0$ y $\lambda_1 > 0$ tales que para cualquier prueba secuencial (ψ, δ) con $\nu = \inf\{n \geq 0 : \psi_n = 1\}$

$$cE_{\theta_0}\nu + \lambda_0\alpha(\psi, \delta) + \lambda_1\beta(\psi, \delta) \geq cE_{\theta_0}\nu^* + \lambda_0\alpha(\psi^*, \delta^*) + \lambda_1\beta(\psi^*, \delta^*), \quad (96)$$

es decir, que ψ^* es óptima en el sentido del Teorema 5.

Combinando esto con el Teorema 1 tendríamos de inmediato

Teorema 8. *Sean A y B dos constantes tales que $0 < A < B < \infty$ y sea (ψ^*, δ^*):*

$$\psi_n^* = I_{\{Z_n \notin (A,B)\}},$$
$$\delta_n^* = I_{\{Z_n \geq B\}},$$

una prueba SPRT con estas constantes.

Entonces para cualquier prueba (ψ, δ) (cuyo tiempo de paro es $\nu = \inf\{n \geq 1 : \psi_n = 1\}$) tal que

$$\alpha(\psi, \delta) \leq \alpha(\psi^*, \delta^*) \quad y \quad \beta(\psi, \delta) \leq \beta(\psi^*, \delta^*) \quad (97)$$

se tiene

$$E_{\theta_0}\nu \geq E_{\theta_0}\nu^*. \quad (98)$$

La desigualdad en (98) es estricta si estricta es por lo menos una de las desigualdades (97).

Si se sabe que A y B realmente satisfacen (93) y (94) la optimalidad de SPRT que establece el Teorema 8 queda completamente demostrado.

4. Conclusión

Presentamos una introducción elemental al análisis estadístico secuencial, empezando desde las definiciones de modelos estadísticos, hipótesis y pruebas, y terminando con la optimalidad de la prueba secuencial de la razón de probabilidades (SPRT) de Wald. La teoría desarrollada es autosuficiente y fácilmente puede ser extendida a modelos más generales.

References

[1] Borovkov A.A. *Estadística matemática.* Ed. Mir. Moscú, 1988.
[2] Chow Y.S., Robbins H., Siegmund D. *Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping.* Boston. Houghton Mifflin Company, 1971.
[3] DeGroot, M.H. *Optimal Statistical Decisions.* McGraw Hill, New York, 1970.
[4] Ferguson, T. S. *Mathematical Statistics: A Decision Theoretic Approach.* Academic Press, New York, 1967.
[5] Ghosh B. K., *Sequential tests of statistical hypotheses.* Addison-Wesley , Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1970.
[6] Govindarajulu Z. *Sequential Statistics.* World Scientific Publishing, Singapore, 2004.
[7] Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G. *Inequalities.* Cambridge University Press, 1934.
[8] Lehmann E. *Testing Statistical Hypotheses.* John Wiley & Sons, New York; Chapman & Hall, Ltd., London 1959.
[9] Shiryayev A.N. *Optimal Stopping Rules.* Springer-Verlag, New York, 1978.

[10] Wald A., Wolfowitz J. Optimum character of the sequential probability ratio test. *Ann. Math. Statistics* **19** (1948), pp. 326--339.
[11] Zacks S. The Theory of Statistical Inference. John Wiley and Sons, New York-London-Sydney-Toronto, 1971.